

第1章

“Down the Classical-Hole” 古典論の矛盾



“Anyone who is not shocked by quantum theory has not understood it.”

「量子論に衝撃を受けない人は、量子論を理解していないだろう」

-Niels Bohr-[1]

ニュートン (Newton) のプリンキピア (自然哲学の数学的諸原理) が 1687 年に発表されて以来、物理学は数学的な手続きを踏みながら森羅万象を理論的に予測する学問として発展し続けてきた。力学に引き続いて、電磁気学、熱力学、統計力学の完成によって、人類はあらゆる物体の位置や運動量を特定し、未来を完全に予測することが原理的に可能かのように見えた。

ところが、黒体放射の実験を皮切りにミクロな世界においてはこれまでの物理学 (古典力学) が通用しないことが発覚していった。すなわち、古典論 (Classical Theory) には、大きな矛盾 (Hole) が存在していたのである。

古典論の矛盾とは一体何であろうか。また、ミクロな世界を記述する量子力学とは一体何であろうか。

第1章の主人公、水上由岐とその幼馴染、若槻鏡・司が織りなす量子力学の導入。あるいは三人の幸福な日常――

ある日の昼下がり，屋上にて

「やっぱり，こんないい天気教室で，それも退屈な授業を聞いているなんてアホらしいとしか言えないわね」

ある日の昼下がり，私こと水上由岐は北高の屋上で読書に耽っていた。授業をサボるなんて不良だ，と言われるかもしれないが，私にとっては管理的で億劫な授業を狭い教室で受けるよりも，自分の読みたい本を読みたいときに邪魔されることなく読める，この広い屋上での時間のほうが有意義なのだ。

キーンコーンカーンコーン，不意にチャイムの鳴る音がした。時計をみると時計針は12をぴったり指していた。そういえば今日は三者面談があるから短縮日課なんだっけか。そう得心するとともにあることに気づく。

「お昼休みってことは，鏡が屋上に来るってことじゃん……」

また授業をサボっちゃったから鏡になんか言われるだろうな，と呻いていると想定通り屋上の扉が大きな音を伴って開いた。

「ちょっとバカ由岐，あんたこんなところで何してんの？ 今日くらいは授業出なさいって昨日さんざん言ったでしょ！」

そう叫んで鼓膜を破らんばかりの大声で突入してきたのが若槻姉妹の上，若槻鏡だ。若槻姉妹は，私の幼馴染というかお隣さんで，姉の鏡はおせっかいにもこうして私を授業に出席させるためにわざわざ屋上まで出張ってくるのだ。

「あーあー，そんなに大声出さなくてもいいじゃん。それに私のクラスの授業がたまたま早く終わってちょっと早めに屋上に来てただけかもしれないじゃん」

まったく，鏡はすぐ早とちりするんだから，とボヤクやいなやゲンコツがとんできた。

「ゆ〜き〜？ セっかく私がわざわざ出向いてるのにその態度はどうなのかしら？」

いや，頼んでないし，と口走りそうになるのをなんとか堪える。

「まあまあお姉ちゃん，たまには由岐の言い分も訊いてあげようよ」

そうなだめるのは若槻姉妹の下，若槻司だ。狂犬鏡の妹とは思えないくらい柔和でしっかりしている。

「やっぱり司はバカな鏡と違ってお利口だね」

また鏡に何か言われるだろうな，と思っていると，声を上げたのは思いのほ

か司だった。

「ゆき～？ あんまりお姉ちゃんいじめると怒るよ～？」

すごい形相で睨まれた。前言撤回、この姉妹ふたりともおっかない。

「はあ、茶番はこれくらいにしておいて、由岐、屋上でまた何してたの？」

茶番の元凶はあんただろ！ と言いたい気持ちを抑えて答える。

「何っていつも通り読書だよ。趣向をかえて量子力学の本を読んでたんだけど、これがなかなか面白くてさ」

そう言って、先程まで読んでいた J.J. サクライを取り出す。

「J.J. サクライ？」

「J.J. サクライは正確には執筆者の名前ね。本の正式名称は『現代の量子力学』だね。現代と言っても初版発行から 40 年以上経ってるけど」

「りょーしなんちゃらとかは知らないけど、そんなの読んでる暇があるなら授業に出なさいよ」

「そうだよゆき。ゆきは頭いいんだから授業にちゃんと出さえすれば絶対いい成績とれるのに」

「だって～成績とかどうでもいいし～あんな簡単でつまらない授業ちまちま受けてるよりも大学の教科書読んでの方が有意義なんだもん」

三者面談で成績のこと（主に出席状況）について担任からとやかく言われそうだけど、私は生憎成績とかいう無価値な指標に興味はない。

「なんですって！」

なんかさっきから思考が読まれてる気がするな…

「いやいや、量子力学面白いんだよ。授業なんかよりほんとに。あ、でも頭の硬い鏡にはちょっと難しいかな？」

「もう、ゆき！」

あはは、流石に言い過ぎたかな。

「ああ、もういい。分かったわ…」

ちょっと怒らせちゃったかな？ まあでも鏡が怒りっぽいのはいつものことだからな～

「お、お姉ちゃん…」

「そのりょーしりがくってやつ、私にも教えなさい。私にだってりょーしりがくの 1 つや 2 つ楽勝なんだから！」

「へ？」

鏡が量子力学？ なにかの冗談？ きっと聞き間違いだろう。

「さあ由岐、教えなさい」

……どうやら聞き間違いではないらしい。

「え？ いやでも私も量子力学についてそんな詳しくないっていうか、他をあたったほうがいいのかも～なんて……」

「もう！ 往生際が悪いなあ～！ お姉ちゃんにいじわるしたゆきが悪いよ。素直にりょーしりがくを教えて」

司は普段温厚なんだけど、いざというときには妙な凄みがあるんだよな。

「し、仕方ないな～、分かったよ」

恨み言の1つや2つ言ってやりたいけれど、やっぱりこの2人には敵わない。そう改心しつつ、渋々準備を進める私なのだった。

1.1 古典力学の矛盾

気は進まないけれど、約束した以上講義するほかない。勢いに押されて承諾してしまった寸刻前の自分を叱責しながらシャーペンをノックする。

「ええと、それじゃあ量子力学の導入をしていくんだけど、まずはその歴史からはじめよう」

「19世紀くらいまでは、力学や電磁気学、熱力学といった私たちが高校で勉強するような所謂『古典物理学』¹を使えば、この世のあらゆる現象は説明できると考えられていたんだよ」

だけど、そうではなかったんだ、と付け加えて鏡と司の方を向く。

「それは、実際に古典力学では説明がつかない現象に出くわした、ということ？」

「その通り。それじゃあ次から古典力学では説明できない、黒体放射という現象についてみていこうか」

1.1.1 黒体放射問題

¹ 「古典」というのは、古いとか、時代遅れとかいう意味ではない。あくまで量子力学誕生に際して、量子力学とこれまでの物理学を区別するために用いられた表記に過ぎない。事実、私たちが普段観測するようなマクロな系においては古典力学は非常に有用。classicには第一級、という訳もあるわけだから、古典、という訳よりむしろこちらのほうが妥当。

「古典力学が衝突した最初の壁が黒体放射問題だよ」

「黒体放射？」

司が首を傾げて言う。

「黒体っていうのは理想的な物体のことで、あらゆる波長の光を吸収する性質をもってるんだ。通常私たちは物体で乱反射した光を網膜で捉え、その波長を色として認識している。だから、あらゆる波長を吸収してしまう、つまり反射が生じない物体は完全な黒として認識される。この黒体のエネルギー放射に関する問題が黒体問題だよ」

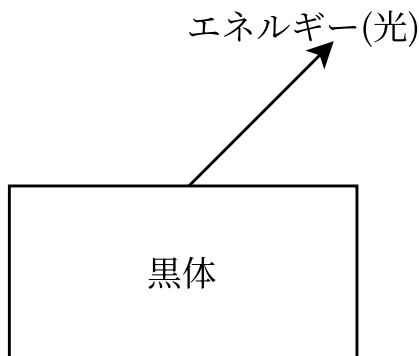


図 1.1 黒体放射のモデル図。エネルギーが光として放出され、光の波長に応じた色として我々に認識される。

「熱統計力学から導かれるレイリー・ジーンズ (Rayleigh - Jeans) の法則によると、振動数が ν から $\nu + d\nu$ の間にあるエネルギー密度は、以下で与えられる。

レイリー・ジーンズの法則

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} \quad \text{振動数 } \nu, \text{ ボルツマン定数 } k, \text{ 絶対温度 } T, \text{ 光速 } c$$

さらに、同様の密度式はウィーン (Wien) によって経験的に与えられていて、次のよう。

ウィーンの法則

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad h: \text{プランク定数}$$

レイリー・ジーンズの式は低周波数帯でウィーンの式は高周波数帯で実験結果と一致していたけれども、全周波数帯を正確に表現する方式はなかなか見つからなくて物理学者を大いに苦しめたんだ」

「黒体放射問題についてはその後も解決されなかったのかなあ？」

いい質問だね、と褒めると、心なしか司は嬉しそうだった。鏡はちょっとムスッとしていたけれど。

「黒体放射問題の解決は、様々な議論を経てプランク (Planck) によって成されるよ。それじゃあ早速、次はプランクの式について説明しようか」

1.1.2 エネルギー量子仮説

「黒体放射のスペクトル²について、ドイツの物理学者マックス・プランク (Max Planck) は実験事実とよく一致するある式を発表した。

プランクの法則

黒体放射のスペクトルにおけるエネルギー密度は、

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

で与えられる。

というもので実験事実とよく一致している」

「さっき出てきたレイリー・ジーンズとウィーンの式に似てるね」

「その通り。実際、 $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ というのは一次近似をつかえば、 ν が十分小さいとき

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

となるから、これをプランクの式に代入してみるとレイリー・ジーンズの式と一

² 一般にスペクトルとはある現象を構成要素ごとに分解したものを指す。今回の場合は黒体から放射される光の周波数 (あるいは波長) とエネルギーの関係。

致することがわかる。逆に、 ν が十分大きいときは

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

となるから、同様にプランクの式へ代入することでウィーンの式と一致する。つまり、特定の周波数領域においてはレイリー・ジーンズとウィーンの式は近似的に正しいんだ」

「プランクはどうやって正しい式を導いたんだろう？」

「そこででてくるのがまさしく『**エネルギー量子仮説**』なんだよ」

「りょーしかって何？」

「簡単に言うと『**不連続**』ってこと。高校までの物理 (古典力学) においてはエネルギーは連続的であるとされていたけれど、**ミクロな系ではエネルギーは量子化されていて離散的な値をとる**のではないかと、という仮説がエネルギー量子仮説だよ。プランクは実際にエネルギーが $E = nh\nu$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) で束縛されていると考えたんだ。実際の導出は統計力学を用いることで行えるけれど、本題から逸れるので割愛するよ」

「プランクはエネルギー量子仮説によって量子力学の礎を築いたんだね」

「いや、実際プランク自身はエネルギー量子仮説を数学的操作くらいにしか捉えていなくて、実際にエネルギーが量子化されることに対しては懐疑的³だったんだよ。プランクはその後も古典力学の観点から量子的な現象を説明しようと試みたんだけど失敗している。とはいえ、黒体放射の式を正確に導いた貢献は大きいし、プランクの立場がどうであれエネルギー量子仮説はその後前期量子論に繋がり、量子力学創設の萌芽であったことは紛れもない事実だよ」

1.1.3 光電効果と光量子説

「古典力学の破綻、特に古典的波動論では説明できない有名な現象として光電効果が挙げられるよ」

「授業でちょっとやったかも。⁴確か、光の粒子性について言及した話だったわよね」

³ 古典電磁気学においては「光は電磁波」といわれるけれど、量子論の立場にたてば「電磁場は光子の集まり」といえる。エネルギー量子仮説での量子化されたエネルギーが、実は光子 1 つのエネルギーに対応している。

⁴ 高等学校において原子分野が必修になるのは 2015 年から。だから厳密には鏡たちは原子分野を履修していない可能性も十分ある。執筆者は不完全。多めに見てほしい。

その通り、と首肯する。優等生なだけあってよく勉強してるな。性格には難ありだけど。

「由岐？　なんか失礼なこと考えてない？」

鏡と司が顔を顰める。まったく、この姉妹はなんで妙なところで勘が働くんだろう。

「いやいや、別になんでもないよ。気を取り直して光電効果とそこから導かれる光量子説についておさらいするよ。光が粒子であるか波動であるかはニュートンの時代からずっと議論され続けていたんだけど、かの有名なヤング (Young) の実験によって光は波動であると広く認知されていったんだ」

「確か、光源から出た光を二重のスリットを通してその様子をスクリーンに投影して確かめたんだっけ？」

「その通り。ヤングの干渉実験ではスクリーンに干渉縞と呼ばれる縞模様が表れた。縞模様ができるということは光が強め合ったり弱め合ったりしているということ。これは波動由来の現象で、光が波動性を持たないと説明がつかないことなんだよ」

でもね、と付け加える。

「ヤングの実験以来、光は波動であり、粒子でないと信じられてきた。けれど光電効果によってその考えが破綻した。光電効果とは光を金属に当てたときに電子が飛び出す現象で、光を波動として捉えた場合波動によるエネルギーは振幅の2乗に比例するから、高強度の光を当てれば光の振動数に関わらず電子が放出されるはず」

「実際はどうだったの？」

「実際には**光のエネルギーは振動数に依存**していたし、ある振動数⁵以下の場合、強度をいくら上げてても電子が放出されることはなかった」

⁵ この閾値振動数を限界振動数 ν_0 、このときの波長を限界波長 λ_0 と呼ぶ。

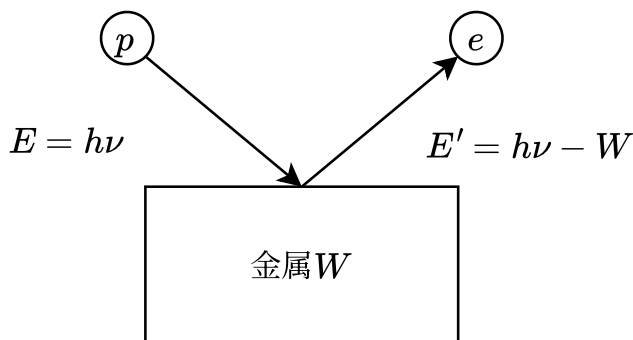


図 1.2 光電効果の図。p は光子，e は電子を示す。W は仕事関数と呼ばれ電子が励起するのに必要な最小エネルギーである。 $E = h\nu$ をもつ光子が金属に衝突し $E' = h\nu - W$ をもつ電子が金属から励起，放出される。

「この事実に対してかのアインシュタイン (Einstein) は非常に大胆な仮説を立てる。それが

光子説

光は粒子として働き，光のエネルギーは

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (\text{プランク定数 } h, \text{ 振動数 } \nu, \text{ 光速 } c, \text{ 波長 } \lambda)$$

で与えられる。

というもの。これなら光電効果を説明できる」

「えっと，つまり光は波動じゃなくて本当は粒子だったってこと？」

「そうわけじゃないんだよ。光電効果から光が粒子性を持つことは確かだけれどさっきのヤングの実験から光が波動性を持つこともまた確かな事実なんだよ」

「粒子性と波動性を両方もつって結局よくわからないよ。どういうときに粒子でどういうときに波動なんだろう？」

「たしかに『粒子性と波動性をもつ』といきなり言われてもよく分からないよね。

ここで大事なのは，**光電効果のように単一の測定に対しては粒子性が現れ，ヤングの実験のように複数の測定に対しては波動性が現れる**ということだよ。イメージとしては 1 つの光子だけを見ればもちろん粒みたいなんだけど，たくさん集まると統計的に波のように振る舞っているように見えるということだよ。だから

『確率の波』なんて言ったりする」

「実際に粒になったり波になったりしているわけではないだね。個々の振る舞いは一見無関係だけど、集団で見ると確かな関係性が見えるっていうのはある意味私たちと同じなのかも…？」

「量子論的な現象を古典論的な言葉で説明することは厳密には難しいけど、その理解でおよそ正しいよ。そしてこれまた後述するけど、この統計性の正体は波動関数という関数なんだよ」

「なんだか古典力学に比べて直感に反する感じがするよ」

「直感に反する、というのはわかるけれども、それは古典力学の類推で量子力学を説明しようとしてるせいだよ。⁶古典力学は量子力学の極限で与えられるから、量子力学を公理として認めてしまえばむしろ違和感なく古典力学を説明できるよ⁷」

「光電効果が光の粒子性を示す重要な実験だったのね」

「光量子仮説はド・ブローイ (de-Broglie) のド・ブローイ波に繋がり、本格的に量子力学が導入されてくるんだよ」

1.1.4 原子モデル

「突然だけど司、原子のモデルってどんなのだと思う？」

「ええと、パッと思いつくのは原子核の周りを電子がまわってる、っていう図だね」

「所謂ラザフォード (Rutherford) モデルと呼ばれるやつだね」

⁶ 量子力学の導入は、本書のように歴史的背景を踏まえて進行していくものと、完成された理論体系を数学を通じて論じていくものがある。初学者には前者のほうがとっつきやすいけど、得てして量子力学の本質を見失ってしまいがちだから後者のような本も併せて読むことが推奨される。

⁷ このような、量子力学を用いて古典力学、主に熱力学を説明しようという試みを (量子) 統計力学という。統計力学を学ぶことで量子力学の妥当性と古典力学がマクロな系において如何に優れた理論であるかを見ることができる。

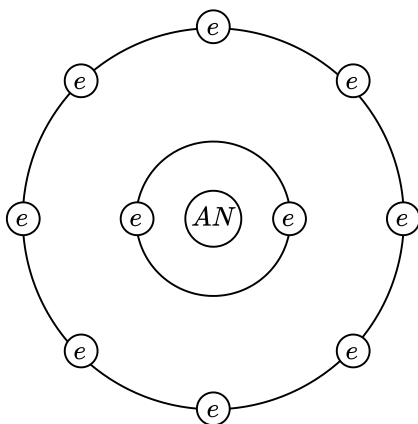


図 1.3 ラザフォードモデル。AN は原子核 (Atomic Nucleus), e は電子を示す。実際の原子においては原子核は図以上に原子に対して非常に小さく、原子はスカスカである。

「この一般的な原子描像は今では当たり前に入れられているけど、このモデルが提唱されたのは 1911 年と比較的最近だし、このモデルに至るまで、J.J. トムソン (Thomson) によるぶどうパンモデル、長岡半太郎による土星型原子モデル等、様々な変遷を辿っているんだ」

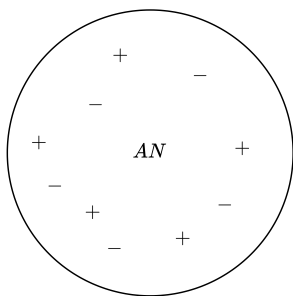


図 1.4 J.J. トムソンによるモデル。このモデルだとラザフォードによる実験の結果をうまく説明できない。

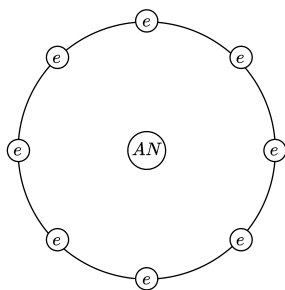


図 1.5 長岡半太郎によるモデル。ラザフォードモデルに近い。

「色々な変遷を辿ってラザフォードモデルという正しい原子の理解に繋がったのね」

いや、そうでもないよ。と訂正する。

「ラザフォードモデルは現代においても最も普及した原子モデルであり、電子を粒子として捉えた場合はほぼ正しいモデルなんだけど、量子力学的には正しくないんだ」

え！ そうなの、と鏡も司も驚いた様子だ。確かに前期量子論までしか扱わないような教科書だと、ラザフォードモデルは正しいモデルとして扱われていることが多いからそう思うのも無理はない。

「電磁気学によると**加速度をもつ電子は電磁波を発生**させる。⁸ラザフォードモデルでは電子は原子核の周りを円運動しているとしているけど、円運動も加速度運動の一つだから当然電磁波を発生させるはず。そしたらどうなるだろう？」

「電磁波は波だからなんらかのエネルギーをもつはず。てことはエネルギーをもつ電磁波を電子が回転しながら放出するとしたら、電子そのものの持つエネルギーはどんどんちっちゃくなっちゃうよ！」

「そのとおり。等速円運動の半径はエネルギーの平方根に比例するから、エネルギーが減ると半径も小さくなって終いには原子核に落ちてしまって、ラザフォードモデルのような安定した構造にはならない」

「ラザフォードモデルも万能ではなかったんだね」

1.2 量子力学の夜明け

ふうーっと一息ついて、シャーペンをおく。時計を見ると、鏡たちが屋上に来てから長い針が1周しそうなことがわかった。

「鏡、司、キリもいいしこころへんで中断しようか。5限目もあることだし……」

授業に出席しない私には関係ないことだけど、私も私で結構疲れたので休憩(という名の逃げ)の口実が欲しい。

「由岐も一緒に5限受けるって言うなら中断もやぶさかじゃないけど、そうじゃないなら授業の続行を主張するわよ？」

「いやいや、優等生の鏡さんが授業サボるのはさすがにダメだと思うんですけ

⁸ 数多くの量子論の教科書でこの事実は端的に扱われているけど、電磁波は電磁気学の最後の関門であり、この事実をしっかりと理解するのは意外と大変。電磁波はマクスウェル (Maxwell) 方程式から導かれる電磁場の過渡現象だけど詳細は割愛する。

ど…」

「…その言い方だと一緒に5限受けるっていう選択肢ははなからないみたいね。ちなみに今日は短縮日課だからそもそも午後の授業はナシよ」

ええ…マジですか……

「で、でもさ、授業はなくとも2人とも疲れたでしょ？ 今日はこちらまででもいいかなー、なんて…」

「ゆき〜？ そうやって逃げる口実が欲しいだけでしょ？ とにかく今日は量子力学を教えてもらうんだから！」

鏡も司も変なところで意地っ張りだから、私がなんと言おうと授業の続行を主張し続けるだろう。仕方ないな、と思いつつ、私は再びノートに相対した。

1.2.1 前期量子論

「ここまで古典力学の破綻を見てきたけれど、前期量子論によっていよいよ量子力学の創設を見るんだ。まず、さっきしたラザフォードモデルの話は覚えてるよね」

「およそ正しいけど電子の円運動を説明できない、ってやつよね」

「そう、その通り。それじゃあ早速その問題を解決したボーア (Bohr) モデルについて説明していくね」

鏡と司がしっかりとノートを取っているのを確認してシャーペンを走らせる。はじめは嫌々だったけど、こうして熱心に聞いてくれている2人を見るとちょっぴりやって良かったと思える。

「まず、ボーアはある束縛を考えてそれを満たしているときは電磁波を放出しないとしたんだ。その束縛というのが

ボーアの量子条件

電子が存在できる軌道は、

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \quad (\text{電子質量 } m, \text{ 電子速度 } v, \text{ 軌道半径 } r, \text{ 量子数 } n = 1, 2, 3, \dots)$$

に限定される。

というものだよ」

「授業でやったけど、なんでこの式がいきなり出てきたのかよくわからなかったのよね」

「実際のボーアの考えに即しているか否かは置いておいて、イメージだけ伝えるね。そのためにはド・ブロイによる物質波について先に扱ったほうが簡明だから先にそちらを説明するね。

ド・ブロイ波

光が波動性だけでなく粒子性をもっていたように、物質も粒子性だけでなく波動性をもつ。この物質波の波長 λ は

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{プランク定数 } h, \text{ 運動量 } p)$$

で与えられる。

というものだ。これがどのようにして導かれるのか、というのもかなり難しいけれど一旦そういうものだと思って保留してほしい⁹」

じゃあ早速やっていくよ、といい、ノートに大きな円と波を描く。

「これをもとにボーアの量子条件を考察してみる。まず考えるべきは波の強め合いの条件。電子を波として捉えると、¹⁰波長の整数倍が軌道の円周と一致すると波が強め合って局在化できそうだね」

⁹ 一応特殊相対性理論による静止エネルギー $E = mc^2$ より運動量 $p = mc = E/c$ で、 $E = h\nu = hc/\lambda$ を用いると形式的に $p = h/\lambda$ となってド・ブロイ波の形になる。

¹⁰ いきなり「電子は波である」という量子力学的解釈を導入している。歴史的には誤りだけどこの方が執筆者は理解しやすかったみたい。

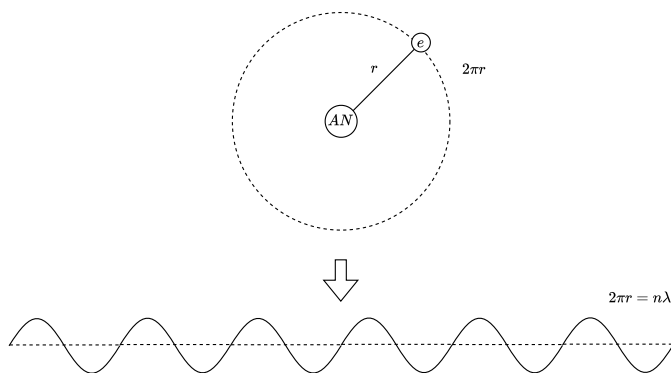


図 1.6 ボーアモデル。原子の中心からの距離 r に対してその円周 $2\pi r$ が波としてとらえた電子の波長の整数倍になるとき、波は円周上で強め合い存在できると仮定する。

「定式化すると、整数 n を用いて $n\lambda = 2\pi r$ となる。ド・ブロイの物質波の考えを借りて運動量を速度 v ¹¹によって $p = mv$ とすれば、

$$n\lambda = n \frac{h}{mv} = 2\pi r \quad \therefore \quad mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

となって確かにボーアの量子条件が導かれる。この量子条件を水素原子モデルに適用すると量子化された半径とエネルギーが求まるんだけど、授業でも習ったと思うから復習も兼ねて鏡にやってみよう」

身構えていた鏡だったけれど、すぐにノートに数式を書き始めた。さすがとしか言いようがない。

「えっと、まず円運動の式とクーロンの法則によって力 F が

$$F = m \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2} \quad \therefore \quad v^2 = \frac{ke^2}{mr} \quad (k \text{ は定数})$$

となって、量子条件を考えると

$$(mvr)^2 = m^2 r^2 \cdot \frac{ke^2}{mr} = mke^2 r = n^2 \hbar^2 \quad \therefore \quad r = \frac{n^2 \hbar^2}{mke^2} \quad \left(\text{ディラック定数 } \hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$$

¹¹ 運動量も速度もベクトル表記するのが最善。今回は簡単のためにスカラーとしているみたい。高校まではベクトルを $\vec{a}$ のように表記するけど、大学以降は $\mathbf{a}$ と表記する場合が多いのでこれに従う。

となるから、軌道半径が確かに量子化されていることがわかるわ。そしてエネルギーの方は……」

「お、お姉ちゃん、エネルギーの方だったら私でもできるかも…」

珍しく？ 司もやる気だ。それならエネルギーの方は司にやってもらおうかな、と司に振ると、司は筆箱からシャーペンを取り出した。ノック部のかわいらしいウサギがその存在を主張する。そういえば司はウサギが好きだったな、と浸っているとシャーペンの軽快な音が聞こえてきた。

「ええと、エネルギーを考えるんだから単純に運動エネルギーと位置エネルギーを考えて

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k\frac{e^2}{r}, \quad v^2 = \frac{ke^2}{mr} = \frac{k^2e^4}{n^2\hbar^2}$$

も考えてあげれば、結局

$$E = \frac{1}{2}m \cdot \frac{k^2e^4}{mn^2\hbar^2} - ke^2 \cdot \frac{mke^2}{n^2\hbar^2} = -\frac{mk^2e^4}{2n^2\hbar^2}$$

でどう？」

「正解。よくできたね 2 人とも」

「ま、まあこれくらい余裕よ」

「えへへ、ゆきの教え方がうまいからだよ」

素直な司と強がる鏡。対象的な 2 人だけれど、2 人とも同じように口角が上がっているのに気づいて、やっぱり姉妹なんだな、と私はひとり感心していた。

「何はともあれ鏡も司もお疲れ様。ここまですが前期量子論の概要だよ。ここまではほとんど高校内容の復習だったと思うけど、いよいよ、次から本格的な量子力学の導入に入っていくよ」

1.2.2 シュテルン・ゲルラッハの実験

「ねえゆき、ちょっと質問があるんだけどいいかな」

と、不安そうに司が呟いた。

「ん？ 私の説明でどこかわからない所があった？」

「わからないとかそういうんじゃないんだけど、今までの話って、古典力学がダメで、量子力学を導入しないとけないって話だったと思うんだけど、ゆきが説明してくれた例だと古典力学がたまたまうまくいかなかっただけっていうか、古典力学にもまだ余地がありそうっていうか…」

ははあん、そういうことか。

「司、鋭い質問だね。よく話を聴いていてえらいね」

えへへ、と羞む司の頭を撫でながら私は続ける。

「司の言うとおり、これまでの例だと『古典力学は破綻してなくて、改良すれば量子力学は必要ないのでは?』と思ってしまう人も多いかもしれないね」

うんうん、と司と鏡が頷く。全く、性格は真反対なのにこういうところは姉妹そっくりだなと思いつつ、私はシャーペンでとある有名な実験の図を描く。

「古典力学の破綻を明確に示した有名な実験としてシュテルン・ゲルラッハ (Stern - Gerlach) の実験というものがあるから次はこれを説明していくよ。簡単に説明すると

シュテルン・ゲルラッハの実験

銀原子ビームを発射して不均一磁場中を通過させると、スクリーン上には2つに分裂した銀原子の軌跡が現れる。

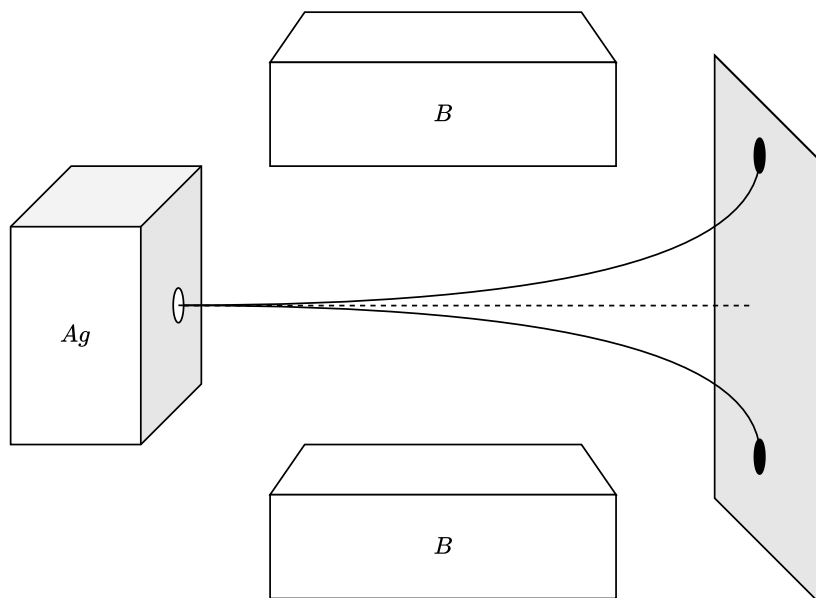


図 1.7 シュテルン・ゲルラッハの実験。銀原子 (Ag) ビームが不均一磁場 B を通過すると2方向へと分裂する。

というものだ。量子論の提唱以前から、物質の持つ磁性は原子を構成する電子の回転、すなわちスピンによるものだと考えられていた。まあ要するに電子の自転によって原子が磁石のような振る舞いをするってことだね。シュテルン・ゲルラッハの実験では、銀原子の偏向によって銀原子を構成している電子のスピンの様子を調べようとしたんだよ」

「電子の性質を調べるんだったら銀原子なんて回りくどいことをしなくても、電子を発射してその偏向を見ればいいんじゃないの？」

鏡が怪訝そうに尋ねる。

「当時は電子を発射する装置なんてなかったからじゃないのかな？」

司がそう答える。

「もちろん装置の問題もあったかもしれないけれど、それ以上に根本的な理由があるよ。電子は当然電荷を持っているから電荷 e 、速度 v をもつ電子が磁場 B の空間にあるとき鏡も司も知っての通り

$$f = ev \times B$$

で表されるローレンツ力がはたらいってしまうよ。スピンによる電子の磁化によって電子が受ける力に比べて、ローレンツ力は非常に大きいから電子単体を用いて実験を行うとスピンによる影響を調べることが困難になってしまうんだ」

「だから銀原子を用いることで間接的に電子のスピンの方の性質を突き止めようとしたのね」

その通り、と首肯して私は続ける。

「銀原子は 47 個の電子と陽子を持っているから当然原子全体で電荷は打ち消されてローレンツ力の影響は受けない。そして電子はそれぞれスピン角運動量という物理量を持っているんだけど、47 個中閉殻中の 46 個どうして打ち消されてしまうから結局銀原子の振る舞いに影響を及ぼすのは最外殻電子 1 つのみになるよ。単純に 47 個すべての電子を考えると、各々が打ち消し合って平均化され全体への影響が見えにくくなってしまうけど、銀原子だとそれを避けることができるんだよ」

「なるほど、だからあえて銀原子を使って実験するんだね」

「やや天下りの的になってしまうけど、原子は磁石のように振る舞うわけだから原子の持つ磁気の強さと方向を表す磁気モーメント μ をもち、 μ は電子のスピンを程度を表すスピン角運動量 S に比例するよ。この原子が不均一磁場 B の空間にお

かれると

$$\mathbf{f} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$$

という力を受けるよ。¹² この力を受けて偏向した銀原子の軌跡を考えれば電子のもつスピンの性質がどのようなものか検討できるね」

「古典論の場合で実験結果を予測して実際の結果と比較すればいいわけね？」

「正解。じゃあここで司に問題。電子が古典論的なもの、つまり $\mathbf{S}$ が連続的に変化していくとしたら、シュテルン・ゲルラッハの実験においてスクリーン上に現れる銀原子の軌跡はどうなるかな？」

「えっと、 $\mathbf{S}$ が連続的に変化するわけだからそれに比例する $\boldsymbol{\mu}$ も連続的に変化して、それに応じて受ける力 $\mathbf{f}$ もいろいろ変化するから…」

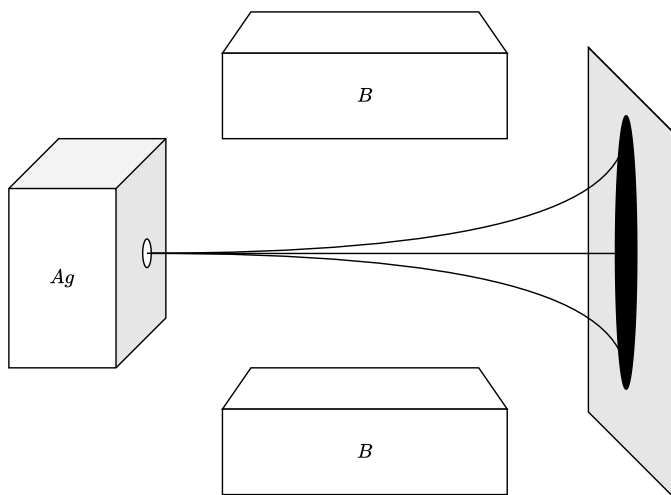


図 1.8 電子を古典論的存在とみなした場合の結果。シュテルン・ゲルラッハの実験とは異なり、軌跡は分裂せず、連続的になる。

「こんな感じになるのかなあ？」

¹² ∇ は勾配を表す演算子ベクトルで成分表示すると $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ となる。磁場が均一な場合 $\nabla \mathbf{B}$ が $\mathbf{0}$ となってしまう力がはたらかなくなってしまうので、シュテルン・ゲルラッハの実験においては不均一磁場を使用している。詳しくはベクトル解析を扱った任意の教科書を参照してほしい。

「正解！ 電子が古典的存在だとすると、司が描いてくれた図のように銀原子は連続的な軌跡を描くはずだね」

じゃあ、次は鏡に質問、といって今度は鏡の方を向く。

「シュテルン・ゲルラッハの実験では、原子軌道が2方向に分裂していたけど、これが何を指し示すかわかる？」

「軌道が2方向に分裂したってことは、原子に加わる力が常に2通りしかないということよね？ ということは、 μ も2通りと考えられるわけで……えっと、つまり S の取り方も2通りしかないということね？」

「その通り！ 電子のスピン角運動量は、古典論では連続的な値をとるけど、量子論的には特定の2つの値しかとらないんだね。シュテルン・ゲルラッハの実験では、スピン角運動量の量子化が確認されて、これがミクロな世界において古典論ではなく量子論を適用しなくてはならないことの説明の一つになっているわけだね」

シュテルン・ゲルラッハの実験からわかること

電子のもつスピン角運動量 S は量子化されており、測定結果として2通りしかとらないことがわかる。なお、この2通りを各々 up スピン, down スピンと呼び、 z 方向について

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \quad (\text{up スピン}), \quad S_z = -\frac{\hbar}{2} \quad (\text{down スピン})$$

と表現される。

「勘違いのないように一応補足しておく、電子がスピンを持っているからといって電子が自転しているというわけではないということに注意が必要だよ。電子は非常に小さい粒子だから、自転速度を考えると光速を超えてしまい相対論に反してしまうんだよ¹³」

「自転してないのに角運動量が存在しているのは不思議ね」

「自転していないのにもかかわらずスピン角運動量が存在しているという電子描像こそ、量子力学を古典力学では記述できない卑近な例と言えるね¹⁴」

¹³ 測定結果が2通りなだけであって、スピンの状態は重ね合わせによって無数に考えられる。数学的には測定結果は固有値で、状態は固有ベクトルに対応している。この話は第2章を読んでからだとわかりやすいかも。

¹⁴ さらに古典論の破綻と量子論の妥当性を示す例としてベルの不等式の破れを実験的に示したアスペ (Aspect) の実験がある。ベルの不等式は本章でも扱うけど、正しい理解には数学の準備

1.3 量子力学の導入と波動力学

昼休み (正確には短縮日課だから昼休みはないけれど) が終わって、幾ばくの刻が過ぎただろうか。日はすでに沈み、デネブ、アルタイル、ベガのなす夏の大三角が私たちを見下ろしている。空はまさに満天の星といった様子で、この空を見ていると田舎も悪くないなと思う。

はじめの方こそ、鏡も司もどこからか持ってきた望遠鏡と双眼鏡で天体観測に耽っていたけれど、それにも飽きたのか今は3人で漫然と空を見上げている。

さすがにもう遅いし、暗くて授業どころじゃないから今日はここまでにしようか、とやんわり中止を切り出したけれど、これまたどこからか取り付けてきた宿泊許可と教室使用許可の紙を振りかざして授業続行を主張する鏡。

この2人にはもう逆らえないな、と半ばあきらめつつ、徹夜を覚悟して指定の教室に向かう私なのだった。

1.3.1 シュレディンガー方程式

「前期量子論の内容をうけてここからいよいよ本格的に量子力学に入っていくんだけど、それは2つのアプローチからはじまる。1つ目がディラック (Dirac) による行列力学で、もう1つがシュレディンガー (Schrödinger) による波動力学だよ」「行列力学って一体何？ 波動力学の方はちょっとだけ想像がつくけど…」

「行列力学は端的にいうと、今までスカラーやベクトルで表現されていた物理量、例えばスカラーで表されるエネルギーやベクトルで表される運動量といったものを行列というベクトルを拡張したもので表現しようというものだよ。行列力学は量子力学を数学的に考察するうえでは非常に有用だけれども、扱う道具がやや高級だからとりあえずは保留して、まずは波動力学から量子力学を導入していくよ。」¹⁵ まずはシュレディンガーによって提唱された基本的な方程式であるシュレディンガー方程式」

がいるため紹介程度にとどめ、アスぺの実験との対応は第3章に譲る。

¹⁵ 行列力学の導入は第2章。

時間項を含むシュレディンガー方程式

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.1)$$

ただし $\psi(\mathbf{r}, t)$ は位置 $\mathbf{r}$ と時間 t で表現される波動関数。

「なんだかすごい式ね。いったいどこから現れたのかしら」

「この式は、シュレディンガーが『粒子がこのような波動関数に従うのでは』という思いつきから生じた式で、ニュートンの運動方程式同様他の法則から導くことのできない基本的な式だから**導出とかはない**」¹⁶ んだけど、それでも既出の法則をうまく解釈することでこの形を生み出せるから順を追ってやってみよう」

シュレディンガー方程式を説明するために一度黒板を消す。にしても黒板消しと黒板が擦れる音は何度聞いても不愉快だ。ノイズが頭にのる感覚、そうまさに同じクラスらしい間宮卓司？ という男が私を惑わそうとしてくるときの、あの「ジリジリ」という音と同じだ。

黒板を消しながら唸っていると司が心配そうに顔を覗いてくる。そこではじめて、意外にも長い時間黒板の前でフリーズしていた自分に気づいた。心配させてしまったことを反省しつつ、動揺を悟られないようにいつも通りの口調で話し始める。

「ということで時間項を含まないシュレディンガー方程式について考えていくよ。まず、ド・ブロイの物質波の考えに基づいて考えると電子は波動的性質をもち、波動方程式を満たすと考えられるね。速度 v で伝わる波動の関数を ψ として波動方程式は、

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

を満たすね。」¹⁷ でもこのままじゃ波動方程式に変数が複数含まれていて厄介だね。こういうときはどうするべきかわかる？」

司が、ううん…と悩みながらも答える。

¹⁶ 以下、導出チェックなことが行われるけど過程が無理やりだったりと**導出としては本質的でない**ので注意。あくまで導出チェックなだけ

¹⁷ 後述されるようにこのような形の微分方程式の解はサイン波となる。振動波動論を未修の人は「解が波 (sin と cos の線形結合) で表されるような微分方程式を考えている」くらいのイメージをもってもらえば構わない。

「確か波動関数 ψ は位置 $\mathbf{r}$ と時間 t の関数だったよね。ということはこの 2 つを分離すれば良さそう…？」

「その通り。実際には時間項が $e^{-i\omega t}$ と表現されると仮定して¹⁸ $\psi = \phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ において議論するよ。一緒にやってみよう」

司が、うん、と頷いて続ける。

「ええと、さっきの波動方程式に代入してあげると、

$$e^{-i\omega t} \nabla^2 \phi + e^{-i\omega t} \frac{\omega^2 \phi}{v^2} = 0$$

となるから、 $\mathbf{r}$ についての微分方程式は

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2 \phi(\mathbf{r})}{v^2} = 0$$

となるよね？」

「正解。さらに周波数 ν 、波長 λ に対して $\omega = 2\pi\nu, v = \nu\lambda$ が成立していて、かつ物質波の要請として運動量 p によって $\lambda = h/p$ とかけることを考えれば $\omega/v = 2\pi p/h$ とかけるから、先程の微分方程式に代入することで

$$\nabla^2 \phi + \frac{4\pi^2 p^2}{h^2} \phi = 0$$

となるね。そしてエネルギー E について考えるんだけど、非相対論的な場合は、¹⁹ シンプルに運動エネルギーと位置エネルギー $V(\mathbf{r})$ の和を考えてあげて

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

としてあげれば²⁰ p の部分を削除できて、簡単のために $\hbar = h/2\pi$ としてあげれば、結局時間項を含まないシュレディンガー方程式が得られるよ」

¹⁸ 高校では時間発展する波を $\sin$ と $\cos$ の線形結合で表現した。これを大学ではオイラーの公式 $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ の類推から複素数を用いて波を表現することが多々ある

¹⁹ 特殊相対性理論を考慮した場合のシュレディンガー方程式にあたるものとしてクライン・ゴルドン方程式やディラック方程式がある。一般相対性理論については未統合。

²⁰ $p = mv$ としてやれば $p^2/2m = mv^2/2$ となり、高校でよく目にする運動エネルギーの形式になる。大学以降の物理では速度ではなく運動量を基本的な量として用いることが多い

時間項を含まないシュレディンガー方程式

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

「あとは $\psi = \phi e^{-i\omega t}$ についてエネルギーの関係式 $E = \hbar\omega$ と $\omega = 2\pi\nu, \hbar = h/2\pi$ を用いてあげれば、 $\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}$ となるから、これを t で微分して得られる

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi$$

をさっき求めた時間項を含まないシュレディンガー方程式に代入してあげれば最初に示した時間項を含むシュレディンガー方程式

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

となるよ。ちなみに $\{\}$ で囲われた部分はハミルトニアンと呼ばれて、 $\hat{H}$ と表現されるよ。ハミルトニアンは古典力学においてはエネルギーに対応するよ。古典力学ではハミルトニアンもエネルギー同様座標 q と運動量 p ²¹ のスカラー値関数 $H(q, p)$ として表されるんだけど、量子力学においてはさらに $q \rightarrow \hat{q}, p \rightarrow \hat{p}$ として演算子化して $H(q, p) \rightarrow \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$ と変換されるよ。ちなみにこの変換手続きを正準量子化と呼ぶよ

「基本方程式とは言うけれど、ニュートンの運動方程式と違ってちょっと複雑な形をしているのね」

「所見だと複雑な式に見えるけど、実際によく使うのは式 (1.1) じゃなくてより単純な式 (1.2) の方だし、ハミルトニアンの部分は正準量子化で古典論から類推できるからそこまで身構えなくても大丈夫だよ」

1.3.2 ボルン則

「波動関数というもので粒子の状態が記述されることは分かったんだけど、結局波動関数って何なんだろう」

鏡の疑問はもっともだ。

²¹ 正確には一般化座標および一般化運動量という。詳しい説明は解析力学の教科書を参照してほしい。

「粒子の状態が波ってことは、ある一点に局在してるわけじゃないってことなのかなあ？」

お、司鋭い。

「いい疑問だね。それじゃあ早速波動関数が何を示しているのか考えていきたいんだけど、波動関数が物理的に何を示すのかは未だに合意が取れていないから、数学的な意味だけを解説するよ。まずはボルン則²²から」

ボルン則

粒子の位置は原理的に測定されるまで得られず、波動関数の絶対値 $|\psi|^2$ はある位置で粒子が測定される確率を表す。直交座標系において、ある位置 $\mathbf{r}$ まわりの微小空間 $dx dy dz$ 、つまり $d^3\mathbf{r}$ (慣用的に $d\mathbf{r}$ と書く) に粒子が測定される確率密度は、

$$|\psi|^2 d\mathbf{r}$$

で与えられる。

「つまるところ、量子力学の世界では測定するまでは位置は分からない。さらに、位置だけでなく一般の物理量 $\hat{A}$ に対応する測定結果 a も測定するまで分からず、ある測定結果 a の期待値 $\langle A \rangle$ は

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d\mathbf{r}$$

で与えられる。ちなみに ψ^* は ψ の複素共役だよ」

「測定結果が確率的にしか得られないというのは確かに不思議ね。でも測定しないと分からないというのは古典論でも同じなんじゃない？」

「たしかに『測定しないと分からない』とだけ言われると、古典論との違いがわかりにくいかもしれないね。本質的に重要なのは古典論では『元から確定している物理量を、測定によってただ知るだけ』と考えるけど、量子論では『物理量その

²² ボルン則は行列力学の形式で表現されたものが多いけど、歴史的にはボルンが波動力学に対して提唱したものの。行列力学での表現はそれを行列形式で一般化したもの。

ものを測定によって知ることはできない』²³という考え方をする。わかりやすく言うと、古典論は初期条件が適切に与えられれば物理量の測定結果について一意な予測を得られるけど、量子論の場合、その予測が確率的になってしまうということだよ。あらかじめ一意に予測できるのは物理量の測定結果そのもののじゃなくてあくまで期待値ということなんだ」

「えっと、要するに古典論では理想的な測定なら 測定結果 = 物理量 とみなせるけど、量子論では理想的でもイコールじゃないってことね？」

「古典論だと測定はあらかじめあるものをただ知るだけの作業だけど、量子論においては測定という行為そのものも重要な意味をもっているんだね」

「鏡も司もそういう理解でいたいあっているよ。さらに**一度測定すると測定結果は確定して、何度測定しても同じ結果が得られる**ことが知られているから、測定という行為の重要性がわかるね」

「測定するまでは確率的にしか測定結果が分からなかったのに、一度測定すると確定してしまうのはすごく不思議。測定という概念が重要なのはわかったんだけど、それ以前に測定ってそもそも何なんだろう？」

やっぱりこの質問は出てくるよね。私自身何度も引っかかった話題だもの。

「測定への疑問は量子力学を勉強し始めた人が必ず通る道だと思うよ。でも実は、測定も波動関数同様数学的にその意味を定義することはできるけど、物理的な意味についてはまだ議論が続いてるんだ。さらに、測定で測定結果が確定してしまう理由はよくわかっていなくて、俗に『観測問題』と呼ばれるよ。いろいろな解釈があって面白いけど、いろいろな解釈に対する中立性を保つために深入りはしないよ。ちなみに波動関数と測定の話については、ベルの不等式の破れの話にもつながるから抑えておいてほしい」

🌙 音無さんの補足 🌙 観測者の意識が世界を決定しているの？

本書で用いられている「測定」と同値な表現として「観測」という言葉もよく用いられる。しかし、「観測」という言葉は『観測者』という言葉と連想させ、主観が内在した言葉のように感じられてしまい「観測者の意識が世界を決定している！」というようなスピリチュアルな文脈で量子力学を誤用する人が後を絶たない。

²³ 標準的な量子論の立場(コペンハーゲン解釈)では「物理量は確定しない」と言い切る形をするが、ボーム解釈のように「元から確定しているが見えない」という解釈も存在する。このようにさまざまな解釈に対して中立な表現をすることのような曖昧な言い方になってしまう。詳しい話はベルの不等式の破れに譲る。

けれど、量子力学における観測に伴う諸事象は量子力学が行列によって記述されることを端緒とした自然な要請であり、**主観的な要素を伴うわけではないよ**。

筆者は「観測」という言葉による誤解を避けるために意図して「測定」という言葉を用いているらしいけど、古典論と区別する意味も込めて「量子測定」というのが妥当だよ。

いずれにせよ、量子論からは「観測者の意識が世界を決定している!」という結論は導かれないし、同様に「自分の意思次第で結果が変えられる」や「意識が現実を変える」といった主張は量子論の主張とは無関係だから気をつけて。

1.3.3 トンネル効果

「シュレディンガー方程式を導入したからには、シュレディンガー方程式を用いて説明できる現象についても触れておきたいね。ということで比較的簡単に結果が予測できるトンネル効果について扱うよ」

トンネル効果

粒子が古典力学的には乗り越えることのできないエネルギー障壁を量子力学的には乗り越えることができる現象。半導体の pn 接合や核融合反応など、様々な現象に関わっている。

「このトンネル効果は一次元の場合に最も簡単に理解できて、数多くの教科書で扱われているからここでもその様子を見てみよう」

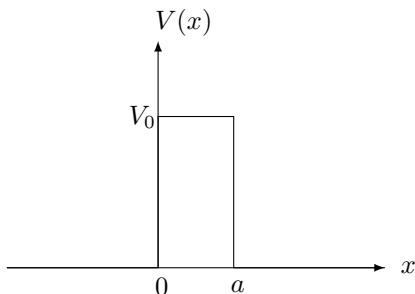


図 1.9 一次元のトンネル効果の様子。ポテンシャルエネルギー $V(x)$ が V_0 の壁に x が負の方向から粒子が入射することを考える。

「まずは状況を整理しよう。ポテンシャルの壁は次のように表される。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ V_0 & (0 \leq x \leq a), \\ 0 & (x > a), \end{cases}$$

そして、ここで早速シュレディンガー方程式を用いるけど、今は定常状態を考えれば十分だよ。更に運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー V について $E = K + V$ と表記されるけど、古典論では $0 \leq E < V_0$ のとき粒子は障壁を通過できない²⁴から、この対応を考えてトンネル効果の問題でもエネルギー E は $0 \leq E < V_0$ と仮定して話を進めるよ」

さあ鏡と司、できるかな？

「えっと、定常状態を考えると時間項が消えるから、シュレディンガー方程式は式(1.2)である

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x)$$

を整理した形である

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)\phi(x)$$

を使えばよさそう…なのかな？²⁵」

「今は $0 \leq E < V_0$ としているから $V(x) - E$ は、 $x < 0$ と $x > a$ のときは負で、 $0 \leq x \leq a$ のときは正になりそうね。領域ごとに解の形が変わりそう……」

「そこまでいけば一旦大丈夫だよ。ここでは簡単のために $k^2 = 2mE/\hbar^2 \geq 0$ と $\kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2 \geq 0$ として解いてみよう。各領域での一般解は次の通り」

黒板に、領域ごとの波動関数を書いていく。

²⁴ 古典的な粒子が x の負の方向からやってくることを考えてみてほしい。エネルギー障壁のちょうど真左 ($x = +0$) にいるときに速度 (古典論的には $K = mv^2/2$ より K に対応) が 0, V が V_0 より大きければ、障壁の右側に出ることができる。今回の場合は出れない場合を考えてるから $E = K + V < V_0$ 。

²⁵ 当然だけど微分演算子 d^2/dx^2 は $\phi(x)$ という相手とセットで考えないと意味がないから「両辺を $\phi(x)$ で割る」なんてことはしないよう注意してほしいし当然非可換。同様のことが行列についても言える。

領域ごとの波動関数の形

- 領域 I ($x < 0$): 左から来る波と、跳ね返る波

$$\phi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

- 領域 II ($0 \leq x \leq a$): 障壁の中なので、増大解と減衰解の重ね合わせ

$$\phi_{II}(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

- 領域 III ($x > a$): 右へ抜けた波

$$\phi_{III}(x) = Fe^{ikx}.$$

「ここで、領域 I は入射波と反射波が考えられるから e^{ikx} と e^{-ikx} の線形結合だけど、領域 III は透過波のみだから、 e^{ikx} のみだよ。ちなみに e^{ikx} と e^{-ikx} は今回の場合それぞれ右向きと左向きの波を表すけど、これは時間発展による項を $e^{-i\omega t}$ としているからだよ²⁶」

「とりあえず波動関数は出せたけど、ここからどうすればいいんだろう？」

「量子力学ではトンネル効果、つまり領域 I からの入射波によって領域 III での波動関数が存在していることを考えたいから、両者の係数の比である $t = F/A$ を考えてみるよ」

「係数の比を考えるということは何らかの等式で結ばないといけなさそうね……」

「鋭い！ 実際今から**境界条件**というものを考えていくよ。今回は**波動関数が全領域で連続かつ滑らか、つまり連続かつ微分可能**であることを考えていくよ」

「つまり

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = 0: & \phi_I(0) = \phi_{II}(0) \\ x = 0: & \phi'_I(0) = \phi'_{II}(0) \\ x = a: & \phi_{II}(a) = \phi_{III}(a) \\ x = a: & \phi'_{II}(a) = \phi'_{III}(a) \end{array} \right.$$

²⁶ 物理系は時間項として $e^{-i\omega t}$ を採用することが多いが工学系は $e^{i\omega t}$ とすることが多い。工学系の場合 e^{ikx} は左向き、 e^{-ikx} は右向きになることに注意。

を考えればいいってことかな？」

「そのとおり，司も鋭い！」

そう司を褒めると，司はちょっと照れながらもどこか自慢げだった。この姉妹，普段はとても仲が良いけれど，よくわからないところで張り合うからちょっと面白い。

「司の言うとおり，境界条件を考えると次の4本の式が得られるよ」

$$\begin{cases} x=0: & A+B=C+D \\ x=0: & ik(A-B)=\kappa(C-D) \\ x=a: & Ce^{\kappa a}+De^{-\kappa a}=Fe^{ika} \\ x=a: & \kappa(Ce^{\kappa a}-De^{-\kappa a})=ikFe^{ika} \end{cases} \quad (1.3)$$

「ちなみに文字の数5つに対して式が4つしかないから A や F の具体的な値は分からないけど，それらの比 F/A については求められるよ。5式目は規格化条件を考えるけどここでは必要ないので割愛するよ。式 (1.3) は，単純な連立式だから，解いていくと $t := F/A$ ²⁷ は次のように表されるよ。

$$t = \frac{e^{-ika}}{\cosh(\kappa a) + \frac{i}{2} \left(\frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa} \right) \sinh(\kappa a)}$$

ちなみに $\cosh(\kappa a) = (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a})/2$, $\sinh(\kappa a) = (e^{\kappa a} - e^{-\kappa a})/2$ だよ。さらにその大きさの二乗，つまり $T = |F/A|^2 = |F|^2/|A|^2$ は

$$T := |t|^2 = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{V_0^2 \sinh^2(\kappa a)}{4E(V_0 - E)}}_{\textcircled{1}}} \quad (1.4)$$

だよ。 T は透過率と呼ばれていて，その定義からも分かる通り入射波の振幅に対する透過波の振幅を表しているよ。そして①の項が有限の値を取るから透過率は0にならない。つまり**波動関数が障壁の向こうにも存在**できるから，ボルン則を考えると**粒子が障壁の向こうで測定される可能性もある**ということだよ」

²⁷ := は定義のイコールで，左辺を右辺で定義することを指す。文献によっては $\equiv$ で表されることもある。

「確かに古典力学ではありえない現象が量子力学では可能になるんだね。でも、少なくとも私たちの身の回りではトンネル効果みたいな現象は確認できないよ？」
 「その疑問はよく分かるよ。そこで式 (1.4) の①の部分の $\sinh^2(\kappa a)$ について考えてみよう。 $\kappa a \gg 1$ のとき、 $\sinh^2(\kappa a)$ は $e^{\kappa a}$ が $e^{-\kappa a}$ より圧倒的に大きくなるから次のように近似できるよ。

$$\sinh^2(\kappa a) = \frac{1}{4}(e^{\kappa a} - e^{-\kappa a})^2 \approx \frac{1}{4}e^{2\kappa a}$$

そして透過率 T は式 (1.4) の①の部分が大きくなるから、次のように近似できるよ。

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\kappa a)}{4E(V_0 - E)}} \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\kappa a} \quad (\kappa a \gg 1) \quad (1.5)$$

この式からどんなことが言えそうかな？」

「うーん、今は $\kappa a \gg 1$ のときを考えているけど、 κa がさらに大きいと式 (1.5) は $e^{-2\kappa a} \rightarrow 0$ となって $T \rightarrow 0$ となって透過しなくなりそう……」

「あ、まってそういうことね？ そもそも $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ なんだから、粒子の質量 m が大きいとき κ も大きくなってこの状況がまさに $\kappa a \gg 1$ 。つまり質量が十分大きいと透過率 T はほとんど 0 になる！」

「うん、司も鏡も大正解！ 実際、一般のトンネル効果についても同様なことが言えて、私たちの普段見ている世界ではトンネル効果はほとんど観測されないことが分かるね」



音 無 さん の 補 足



ミクロとマクロの境界は？

量子力学と古典力学の対応関係としてよく目にする「量子力学はミクロで古典力学はマクロ」という表現を見ると、多くの人が、「じゃあミクロとマクロの境界ってどこだよ」という疑問を持つと思う。

結論から言うと、この表現は単純化しすぎているだけで境界なんてものは存在しない。

例えば、トンネル効果の話では質量が十分大きいときには透過率がほとんど 0 になってほとんどトンネル効果が見られないけど、有限の質量であれば完全な 0 にはならずトンネル効果の余地があるから境界を引くことはできない。

さらに、ヤングの実験の干渉縞のような重ね合わせによる現象は、デコヒーレンスと呼ばれる環境との相互作用で干渉項がほとんど消えてしまうから、マクロな物体ではほとんど見られないけど、完全に消えるわけじゃないからやっぱり境界を引くことはできない。(デコヒーレンスについては測

定の話として第3章で詳しく扱う)

このように、量子特有の現象はスケールが大きくなるにつれて見えにくくなっていく傾向があるけれど、完全に消えるわけではないからミクロ/マクロで境界を設けるのは適切じゃない。

量子力学と古典力学をスケールの差で区別される隔たれた理論と考えるより、量子力学はすべてのスケールで成り立つ普遍的な理論で、古典力学はその極限として理解するのが正しい。

1.4 量子力学の妥当性

チョークをおいてひと心地つくと、鏡も司も伸びていた。流石にちょっと気合を入れすぎたかな、と思って窓を見ると、カーテンから青白い光が漏れ出ているのを私は認めた。夜明けが近いのだ。

「鏡も司もお疲れ様。かなり疲れたとは思うけど、今からは量子力学の妥当性について議論していくよ。古典論に修正を加えれば良いわけじゃなく、本質的に古典論だと説明できない現象があることをしっかり理解してほしい」

1.4.1 不確定性原理

「早速、不確定性原理からスタートするよ」

「不確定性原理？ 名前くらいは聞いたことがあるわ…確か、位置と運動量是一緒に確定できない、的なやつだった気がするけど…」

「そのとおりだよ。具体的には、

位置と運動量の不確定性原理

位置と運動量の大きさの不確かさ $\Delta x, \Delta p$ について、

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

が常に成立する。

というものだよ。ちなみにここでいう一緒、というのは正確には同じ時刻、という意味だよ。『同じ時刻に確定できない』というのを『同時に確定できない』と表現する人もいるけどこれは適切とは言えないよ。というのも量子力学では同一の対象に対して、異なる物理量を同じ時刻に測定する同時測定と、異なる対象に対

して、別々の物理量を個別に測定する個別測定とがあって両者は明確に区別されるからだよ。日常的には同時という言葉は同じ時刻を表すことが多いけど、量子測定では『同じ対象に対して』という意味で使われるから同時の意味を混同しないように注意して²⁸」

同時測定の不確定性原理

個別測定の不確定性原理

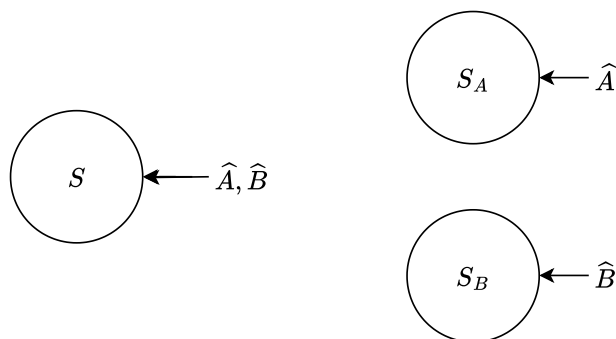


図 1.10 同時測定と個別測定の不確定性原理の違い。同時測定の不確定性原理は同じ対象 S に対して、物理量 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ とを同じ時刻に測定したときの不確定性であり、個別測定の不確定性原理は S とおなじ状態になるよう用意した、異なる対象 S_A, S_B に対してそれぞれ物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ を同じ時刻ではあるが個別に測定したときの不確定性である。位置と運動量の不確定性原理は個別測定の不確定性原理にあたる。詳しくは第 2 章、第 3 章で議論する。

「量子力学では『同時』という言葉の使い方に注意しないとイケないのね。ところで不確かさって何？」

「不確かさはここでは測定結果全体の標準偏差，すなわちばらつき²⁹のこと。物理量 $\hat{A}$ に対応する測定結果 a においては測定結果全体である A の期待値 $\langle A \rangle$ と A^2

²⁸ 詳しい議論は第 2 章、第 3 章に譲るけど、測定時に反作用が生じる量子論では個別測定と同時測定はまったく違う操作だし、当然そこから考察される不確定性もまったく違う意味をもっていることに注意して。

²⁹ 標準偏差の定義は各測定結果の平均からの差の二乗の平均の平方根であったから、この大小によって測定結果が平均 (期待値) の近くに集中しているかばらけているかを定量的に把握することができる

の期待値 $\langle A^2 \rangle$ を用いることで

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

と表現されるよ。ちなみに標準偏差はあくまで物理量とその測定結果の統計的な性質、ゆらぎを示すものだから測定誤差とは関係がないよ」

「不確定性原理が数式で表されることは分かったけど、それがどうやって『位置と運動量は同じ時刻では確定できない』につながるのかしら？」

「『同じ時刻では確定できない』とはどういう状況か考えてみよう。確定できるというのは、その物理量を測定したとき必ず同じ測定結果が得られるということだよ。このとき測定結果のばらつきはどうなると思う？」³⁰

「ええと、常に同じ値なんだからばらつきはなさそう…つまり、0かな？」

「そのとおり。つまり $\Delta A = 0$ となるね。話を位置と運動量に戻そう。もし位置も運動量も同じ時刻に確定できるのなら $\Delta x \Delta p = 0$ となるはずだよ」

「でも不確定性原理より $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ なわけだから…」

「そうか！ 不確定性原理だと $\Delta x, \Delta p$ のいずれかを0にしようとするともう一方は ∞ に発散してしまうということね？」

「確かに一方が発散してしまうのだから同じ時刻に確定させることはできなさそう…」

「鏡も司も大正解。一つ誤解がないように言っておくと、この**不確定性原理は計測器による測定誤差によるものではなくて、量子力学において物理量の測定時に生じる本質的なもの**だよ。さらに**位置と運動量の不確定性原理を『ある対象の位置を知ろうとすると運動量がわからなくなり、運動量を知ろうとすると位置がわからなくなる』と表現する人も**いるけど、**そもそも位置を測定している対象と運動量を測定している対象は違うからこの表現は適切ではないよ**」

「この不確定性原理は導出できるのかな？」

「行列力学なら物理量 $\hat{A}$ のもつエルミート性に注目することで、波動力学ならフーリエ変換のもつ性質に基づいて一般の場合について示することができるけど、それには色々と準備が必要だからここでは割愛するよ。」³¹ 数学的に導出ができ

³⁰ ボルン則で水上さんも強調していたけれど、量子論ではたとえ理想的な測定であっても物理量 $\hat{A}$ = 測定結果 a ではないことに注意。ただしその期待値である $\langle \hat{A} \rangle$ と $\langle A \rangle$ は理想の場合なら等しいと考える。

³¹ 後述されるベルの不等式同様行列力学による導出は第2章に譲る。

て、測定器を介さないから、不確定性原理はやはり計測器の問題ではなく本質的なものだということがわかるね」

1.4.2 ベルの不等式の破れ

「ボルン則を説明するときには物理量と測定結果の話をしたけど、ここではベルの不等式の破れによって古典論では説明できない現象が確かに存在することを知ってもらうよ」

CHSH の不等式 (ベルの不等式の一つ)

局所性、実在性、測定独立性を仮定した一意な世界においては測定結果の相関はある一定の範囲に制限される。特に ± 1 をとる測定結果全体 A, A', B, B' について、相関 $\langle AB \rangle, \langle AB' \rangle, \langle A'B \rangle, \langle A'B' \rangle$ は次の不等式を満たす。

$$-2 \leq \langle AB \rangle + \langle AB' \rangle + \langle A'B \rangle - \langle A'B' \rangle \leq 2 \quad (1.6)$$

「局所性、実在性、測定独立性って何？」

「局所性はある場所での出来事が離れた場所に瞬時に影響しないこと、実在性は物理量が測定の有無に関わらずあらかじめ確定していること、測定独立性は測定結果が他の測定と無関係であること」

「なんだか当たり前のことに聞こえるけど」

「たしかに、私たちの感覚では古典論同様物理量は測定前から決まっているから実在性も成り立つし、あらゆるものの速度が有限だから局所性も成り立っていて、かつ測定も独立と考えるけど、実際はそうじゃないということをベルの不等式の破れは示してくれるんだよ」

「どういうこと？」

「ベルの不等式はあくまで局所性、実在性、測定独立性、世界の一意性の4つの仮定のもとで成り立つ不等式で、たとえば量子論に基づくとCHSHの不等式の場合は、式(1.6)の(左辺) $= 2\sqrt{2}$ となって破られることがあるよ」

「実験で実際に相関の和が2を超えれば、CHSHの不等式が破れてベルの不等式の仮定が成り立たないことがわかるわけね」

「鋭い。実際そのとおりでアスペ (Aspect) の実験によって2を超えてしまうことが確認されているよ」

「ということはベルの不等式の仮定を要請する古典論は間違っていて、量子論が正しいわけだね」

「そう、と言い切りたいところだけどベルの不等式の破れは局所性、実在性、測定独立性そして忘れがちだけど一意な世界すべてを仮定した古典論が成り立たないことを示しているだけで、**量子論が正しいことを示しているわけではないんだよ**。量子論以外の理論であっても局所性、実在性、測定独立性、世界の一意性のいずれかを放棄すればベルの不等式の破れを説明できる理論は存在し得るからね」

「つまりどういうこと？」

鏡も司もちょっと混乱しているみたい。

「ベルの不等式の仮定は、局所性、実在性、測定独立性、世界の一意性の4つすべて³²だったから、ベルの不等式を破るということは、背理法的に4つのうち1つ以上は放棄しないといけないということで、**どれを放棄するかは選べてしまう**。極端な話4つすべてを放棄した理論を考えれば当然これもベルの不等式を破る理論になり得るわけだからね」

「あくまでベルの不等式の破れは量子論の妥当性を示すだけで正当性までは示さないってこと？」

「司の理解で正しいよ。そして実際、局所性、実在性、測定独立性、世界の一意性のうちどれを捨てるかによってボーム解釈、コペンハーゲン解釈、超決定論、多世界解釈といろいろ解釈や理論が考えられて今なお議論されているよ。ここらへんの話は波動関数や測定の物理的意味にもつながる深い話だけれどやはり哲学色が強くなってしまいうから割愛するよ。ともかくベルの不等式およびCHSHの不等式の破れの一例が量子論によって示されていて、実験によっても確認されているから古典論では説明できない現象が確かに存在することはわかるね」

³² ベルの不等式の破れについて、局所性、実在性のみが仮定として重視されがちだけど実際には測定独立性および世界の一意性という仮定があるということをしっかりおさえておいてほしい。

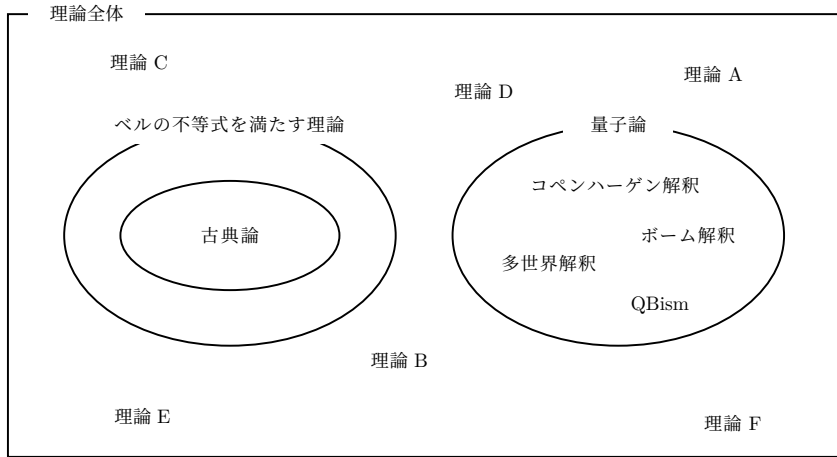


図 1.11 各理論のベン図。図のように量子論はベルの不等式を満たさない理論の 1 つであるがベルの不等式を満たさない理論 A～F も存在できる。ベルの不等式の破れはベルの不等式を満たす理論である古典論が説明できない現象が存在することを示しているだけで、ベルの不等式を満たさない理論である量子論が正しいことを示しているわけではないことに注意。

「鏡も司も本当にお疲れ様。これで本当に授業はおわりだよ」

「難しかったところはたくさんあるけど、ゆきの説明がわかりやすかったおかげでなんとなく量子力学が分かった気がするよ」

と、司。

「ま、まあ、私もなんとなく分かった気がするわよ。その、なんていうか、まあ、ありがと？」

と、鏡。

「もうお姉ちゃんは素直じゃないな～、こう言ってるけど、お姉ちゃん、ゆきとちゃんと話せただけで嬉しいんでしょ？」

「そ、そんなことないわよ！ もう、司～！」

🌙 音無さんの補足 🌙 物理量 $\neq$ 測定結果 に対する様々な立場

ここまで『量子論では物理量と測定結果は等価ではない』という趣旨の話をしてきたけれど、この解釈については**実在論と非実在論で立場が異なる**。

コペンハーゲン解釈のように、非実在論的な立場をとる場合は物理量が原理的に未確定だからこそ、測定によって値が確定する測定結果とは等価でないと考える。

一方、ボーム解釈のように実在論的な立場をとる場合は、物理量はあらかじめ確定しているけれども測定は原理的に物理量を完全に反映できないから物理量と測定結果は等価でないと考える。

いずれにせよ、行列力学に踏み込むと量子力学においては物理量は行列、測定結果はその固有値として考えるから、物理量 $\neq$ 測定結果 となる。多くの量子論の本で物理量と測定結果が混同されていることがある。本書では物理量は $\hat{A}$ 、測定結果は a 、測定結果全体は $\hat{A}$ を外した A と表記しているから**しっかり区別**して理解してほしい。

このように、等しく「量子論では物理量と測定結果は等価ではない」という立場をとっていてもその解釈は様々。同様に測定結果が確率的であることや不確定性原理についても、非実在論では物理量の性質に理由を求めるけど実在論では測定の性質に理由を求める。

素晴らしき日々Ⅰ

外を見てみると東の空がやけに眩しい。そこではじめて、朝が来たことに気づいた。

鏡と司の方を見てみるとスヤスヤと寝息を立てていた。さっきまでは夜明けの学校散策を楽しんでいた2人だったけど、さすがに疲れたのだろう。

「にしても、夜の学校で徹夜で量子力学の授業か……。嫌々だったけど、今思えば非日常って感じでちょっと楽しかったのかも」

時計の針はもうすぐ7時を指そうとしている。徹夜状態の私とは無関係に、今日も、いつも通りに、学校は始まるのだろう。

—————そして、私たちは何気ない日常に回帰していく。

眠気覚ましも兼ねていつもの屋上に向かう。涼しい風が私の頬を風いでいく。「やっぱり……いい女には、たばこと屋上と……そしてヒラヒラ服だわね……」

たばこと屋上、そしてヒラヒラ服。極めつけは、鏡と司と過ごす何気ない日常。それが多分、私にとっての「素晴らしき日々」。

俯瞰 A

「読者のみんなこんにちは。音無彩奈だよ。はじめまして？ ふふふ…おかしいことを言うんだね。君とは初対面じゃないはずだよ」

「『音無さんの補足』とかページの下の小さい文字の補足とかあったでしょ。あれは全部私。ふふふ、気付かなかった？」

「そんなにメタいことを言ってもいいのかって？」

「そりゃあ、私は『境界に立つ少女』だからね…」

「もし進めていくうえで躓くことがあったら、補足を見ることをおすすめするよ。前の章の補足が後の章で効いてくることがあるからね」

「今回の『測定』はどうだった？ これが今の君に測定できる、3人の『素晴らしい日々』だよ…」

「今回の『測定』はこれでお終い。次は行列力学の『測定』だよ」

「最後に、といったらヘンかもしれないけど演習問題を置いておくよ。★がついてるやつは難しいけど、まあ、頑張って」

問題 1.1

一次元のトンネル効果問題について、反射率 $R = |r|^2 = |B/A|^2$ を求めよ。また反射率 R と透過率 T の和が1になることを確認せよ。

問題 1.2 (★)

加速度運動する過電粒子は電磁波を発生することを示せ。

問題 1.3 (★)

波動力学において、位置と運動量の不確定性原理を導出せよ。(フーリエ変換の性質を用いる)

素晴らしい量子
～不連続存在～上